炎德·英才大联考湖南师大附中 2023 届高三月考试卷（一）

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $1+z\mathrm{i}=z-\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】由题设 $1+\mathrm{i}=(1-\mathrm{i})z$，利用复数的除法求 z.

【详解】由题设，$1+\mathrm{i}=(1-\mathrm{i})z$，则 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}=\mathrm{i}$.

故选：A

2. 已知集合 $M=\{m\mid$关于 x 的方程 $x^2-mx+2m=0$ 无实数根$\}$，$N=\left\{n\mid\text{方程}\dfrac{x^2}{n-2}+\dfrac{y^2}{10-n}=1\text{表示椭圆}\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $(2,8)$

B. $\{$点$(m,n)\mid 0<m<8,2<n<10\}$

C. $(2,6)\cup(6,10)$

D. $(2,6)\cup(6,8)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用 $\Delta<0$ 求集合 A，根据曲线表示椭圆求集合 B，再应用集合的交运算求 $M\cap N$.

【详解】由 $x^2-mx+2m=0$ 无实根，则 $\Delta=m^2-8m<0$，即 $0<m<8$，

由 $\dfrac{x^2}{n-2}+\dfrac{y^2}{10-n}=1$ 表示椭圆，则 $\begin{cases}n-2>0\\10-n>0\\n-2\neq 10-n\end{cases}$，可得 $2<n<6$ 或 $6<n<10$，

所以 $M=\{m\mid 0<m<8\}$，$N=\{n\mid 2<n<6\text{或}6<n<10\}$.

故 $M\cap N=(2,6)\cup(6,8)$.

故选：D

3. 已知边长为 2 的等边$\triangle ABC,O$为其中心，对①$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right|=6$；②$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$；③$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=0$；④$3\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=2$这四个等式，正确的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】对于①：根据向量线性运算整理可得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，理解判断；对于②、④：根据向量数量积的定义$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，代入运算判断，注意对向量夹角的理解；对于③：根据G为三角形的重心$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，理解判断.

【详解】对于①：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，则$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right|=0$，$\therefore$①错误；

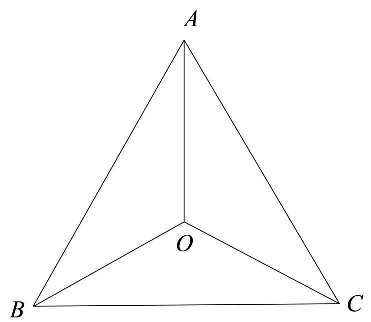
对于②：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=2\times2\times\frac{1}{2}=2$，$\therefore$②正确；

对于③：根据题意可知O为等边$\triangle ABC$的重心，$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

则$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=0$，$\therefore$③正确；

对于④：$3\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=3\left|\overrightarrow{AO}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left(\pi-\angle AOB\right)=3\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=2$，$\therefore$④正确；

故选：C.



4. 自 5 月初，麓山之巅观日出在抖音走红后，每天都有上千人披星戴月登顶岳麓山看日出，登顶游客中外地游客占$\frac{3}{5}$，外地游客中有$\frac{1}{3}$乘观光车登顶，本地游客中有$\frac{1}{6}$乘观光车登顶，乘观光车登顶的票价为 20 元. 若某天有 1200 人登顶观日出，则观光车营运公司这天的登顶观日出项目的营运票价收入是（　　）

A. 4800 元　　　　B. 5600 元　　　　C. 6400 元　　　　D. 7200 元

【答案】C

【解析】

【分析】根据全概率公式先求任选一人，他是乘观光车登顶的概率为$\frac{4}{15}$，再结合二项分布求每天的营运票价收入．

【详解】从登顶观日出的人中任选一人，他是乘观光车登顶的概率$P=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{15}$

则观光车营运公司这天的登顶观日出项目的营运票价收入是$1200\times\frac{4}{15}\times 20=6400$(元)

故选：C．

5. 有一个圆台型的密闭盒子（表面不计厚薄），其母线与下底面成60°角，且母线长恰好等于上下底半径之和，在圆台内放置一个球，当球体积最大时，设球的表面积为S_1，圆台的侧面积为S_2，则（　　）

A. $S_1>S_2$　　B. $S_1<S_2$　　C. $S_1=S_2$　　D. 无法确定S_1与S_2的大小

【答案】B

【解析】

【分析】根据母线与下底面成60°角，且母线长恰好等于上下底半径之和，得到$b=3a$，通过计算得到圆台正好有一个与其上下底面及侧面都相切的内切球，此球体积最大且半径是$\sqrt{3}a$，计算出S_1与S_2，比较出大小.

【详解】如图所示，过点 D 作 DE⊥AB 于点 E，设圆台上下底的半径分别为a、b，由其母线与下底面成60°角，且母线长恰好等于上下底半径之和，

则$AE=CD=a, BE=b-a, DB=a+b$，且$a+b=2\left(b-a\right)$，解得：$b=3a$，

故$AC=DE=\sqrt{3}BE=\sqrt{3}\left(b-a\right)=2\sqrt{3}a$，

取 AC 中点 O，过点 O 作 OH⊥BD 于点 H，连接 OB，OD，

则由勾股定理得：$OD=\sqrt{OC^2+CD^2}=2a$，$BO=\sqrt{OA^2+AB^2}=2\sqrt{3}a$，

又$BD^2=OD^2+OB^2$，由勾股定理逆定理可得：OB⊥OD，

所以$OH=\frac{OB\cdot OD}{BD}=\frac{2a\times 2\sqrt{3}a}{4a}=\sqrt{3}a$，

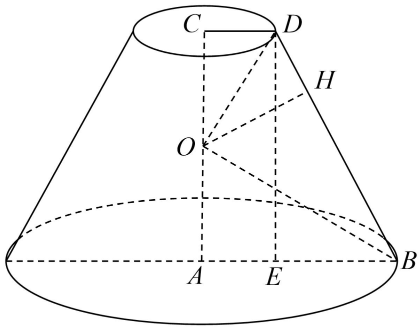
故满足条件的圆台正好有一个与其上下底面及侧面都相切的内切球，

此球体积最大且半径是$\sqrt{3}a$，表面积$S_1=12\pi a^2$，

圆台上下底的半径分别为a、$3a$，母线长为$4a$，

侧面积 $S_2=\pi(a+3a)\cdot 4a=16\pi a^2$，

则 $S_1<S_2$.



故选：B

6. 奇函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi),(\omega>0,\varphi\in(0,\pi))$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上恰有一个最大值 1 和一个最小值-1，

则 ω 的取值范围是（　　）

A. $[2,6)$　　　　B. $\left[2,\frac{9}{2}\right)$　　　　C. $\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$　　　　D. $\left[\frac{3}{2},6\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $f(x)$ 为奇函数且 $\varphi\in(0,\pi)$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，由已知有 $\omega x\in\left[-\frac{\omega\pi}{3},\frac{\omega\pi}{4}\right]$，根据正弦型函数的性质及最值分布列不等式组，求参数范围.

【详解】由 $f(x)$ 为奇函数，则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，又 $\varphi\in(0,\pi)$，故 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)=-\sin\omega x$，在 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，则 $\omega x\in\left[-\frac{\omega\pi}{3},\frac{\omega\pi}{4}\right]$，$\omega>0$，

当 $0<\frac{\omega\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，则 $-\frac{5\pi}{2}<-\frac{\omega\pi}{3}\le-\frac{3\pi}{2}$，故 ω 无解；

当 $\frac{\pi}{2}\le\frac{\omega\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$，则 $-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\omega\pi}{3}\le-\frac{\pi}{2}$，可得 $2\le\omega<\frac{9}{2}$；

当 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\omega\pi}{3}<0$，则 $\frac{3\pi}{2}\le\frac{\omega\pi}{4}<\frac{5\pi}{2}$，无解.

综上，ω 的取值范围是 $\left[2,\frac{9}{2}\right)$.

故选：B

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(\left|x-2\right|+1\right)-\dfrac{1}{x^2-4x+5}$，则 $f\left(-1\right)$、$f\left(\mathrm{e}^2\right)$、$f\left(2^{\mathrm{e}}\right)$ 的大小关系是（　　）

A. $f\left(-1\right)<f\left(2^{\mathrm{e}}\right)<f\left(\mathrm{e}^2\right)$　　B. $f\left(-1\right)<f\left(\mathrm{e}^2\right)<f\left(2^{\mathrm{e}}\right)$

C. $f\left(\mathrm{e}^2\right)<f\left(-1\right)<f\left(2^{\mathrm{e}}\right)$　　D. $f\left(2^{\mathrm{e}}\right)<f\left(\mathrm{e}^2\right)<f\left(-1\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】分析可知函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，可得出 $f\left(-1\right)=f\left(5\right)$，分析函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上的单调性，构造函数 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，利用导数分析函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}\right]$ 上的单调性，可得出 e^2、2^{e} 的大小，并比较 2^{e} 与 5 的大小，结合函数 $f\left(x\right)$ 的单调性可得出结论.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\ln\left(\left|x-2\right|+1\right)-\dfrac{1}{x^2-4x+5}=\ln\left(\left|x-2\right|+1\right)-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2+1}$，

对任意的 $x\in\left(-\infty,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$，

$f\left(4-x\right)=\ln\left(\left|2-x\right|+1\right)-\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2+1}=\ln\left(\left|x-2\right|+1\right)-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2+1}=f\left(x\right)$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，则 $f\left(-1\right)=f\left(5\right)$，

当 $x>2$ 时，$f\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2+1}$，

因为二次函数 $y=\left(x-2\right)^2+1$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上为增函数，且 $y=\left(x-2\right)^2+1>0$，

所以，函数 $y=\ln\left(x-1\right)$、$y=-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2+1}$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上为增函数，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上为增函数，

令 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，其中 $0<x\leq\mathrm{e}$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{1-\ln x}{x}\geq0$，

故函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}\right]$ 上为减函数，所以，$g\left(2\right)<g\left(\mathrm{e}\right)$，即 $\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，

所以，$\mathrm{e}\ln 2=\ln 2^{\mathrm{e}}<2\ln\mathrm{e}=\ln\mathrm{e}^2$，所以，$\mathrm{e}^2>2^{\mathrm{e}}$，

又因为 $2^{\mathrm{e}}>2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}>5$，即 $\mathrm{e}^2>2^{\mathrm{e}}>5$，所以，$f\left(\mathrm{e}^2\right)>f\left(2^{\mathrm{e}}\right)>f\left(5\right)=f\left(-1\right)$.

故选：A.

8. 在$\triangle ABC$中，$AB=5, AC=3, \tan A=\dfrac{4}{3}$，点$M$、$N$分别在边$AB$、$BC$上移动，且$MN=BN$，沿$MN$将$\triangle BMN$折起来得到棱锥$B-AMNC$，则该棱锥的体积的最大值是（　　）

A. $\dfrac{16\sqrt{2}}{15}$　　B. $\dfrac{16\sqrt{3}}{15}$　　C. $\dfrac{16\sqrt{6}}{15}$　　D. $\dfrac{309}{128}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，可得$\triangle ABC$的具体形状，由折叠，可得当面$MNB\perp$面$AMNC$时，此时的点B到底面$AMNC$的距离最大，设$BM=2x$，将四棱锥中底面积和高，都用x表示出来，整理出体积的函数，利用导数求最值，可得答案.

【详解】由$\tan A=\dfrac{4}{3}$得$\cos A=\dfrac{3}{5}$，由余弦定理得$CB=4$，

则$\triangle ABC$是直角三角形，C为直角，对MN的任何位置，当面$MNB\perp$面$AMNC$时，此时的点B到底面$AMNC$的距离最大，此时$\angle NMB$即为MB与底面$AMNC$所成的角，

设$BM=2x$，

在$\triangle MNB$中，$\tan B=\dfrac{3}{4}, S_{\triangle MNB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot x\cdot \tan B=\dfrac{3}{4}x^{2}, \sin\angle NMB=\sin B=\dfrac{3}{5}$，

点B到底面$AMNC$的距离$h=MB\sin\angle NMB=\dfrac{6x}{5}$，

则$V_{B-AMNC}=\dfrac{1}{3}\left(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle MNB}\right)h=\dfrac{1}{3}\left(6-\dfrac{3}{4}x^{2}\right)\cdot\dfrac{6x}{5}=\dfrac{24x-3x^{3}}{10}\left(0<x\bullet\dfrac{5}{2}\right)$，

$V'_{B-AMNC}=\dfrac{-9x^{2}+24}{10}=-\dfrac{9}{10}\left(x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

令$V'_{B-AMNC}=0$，解得$x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，可得下表：

x	$\left(0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	$\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{5}{2}\right]$
V'_{B-AMNC}	+	0	−
V_{B-ANMC}	↗	极大值	↘

故当$x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$时，该棱锥的体积最大，为$\dfrac{16\sqrt{6}}{15}$.

故选：C.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 A_1D_1 靠近点 D_1 的三等分点，点 F,G 分别为 C_1D_1,B_1C_1 的中点.下列说法中正确的是（　　）

A. A,C,E,F 四点共面

B. $AD_1\perp B_1D$

C. $BG//$ 平面 ACD_1

D. 三棱锥 $D-ACD_1$ 与三棱锥 $B-ACD_1$ 体积相等

【答案】BD

【解析】

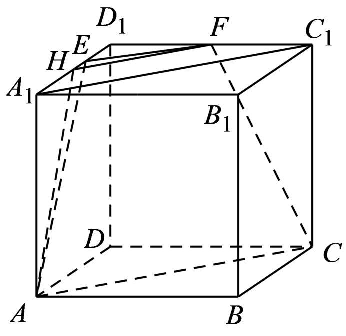
【分析】A 若 H 为 A_1D_1 的中点，易证 H,F,A,C 共面，由已知得 E 在面 FAC 外，即可判断；B 利用正方体中的线面垂直的性质判断；C 若 H 为 A_1D_1 的中点，应用线面平行的性质可得 $AH//BG$，根据 AH 与面 ACD_1 的位置关系即可判断；D 利用等体积法即可判断.

【详解】A：由正方体性质知 $A_1C_1//AC$，若 H 为 A_1D_1 的中点，又 F 为 C_1D_1 的中点，

所以 $HF//A_1C_1$，故 $HF\parallel AC$，则 H,F,A,C 共面，

而 E 是线段 A_1D_1 靠近 D_1 的三等分点，所以 E 在面 $HFCA$ 外，即 $E\notin$ 面 FAC，

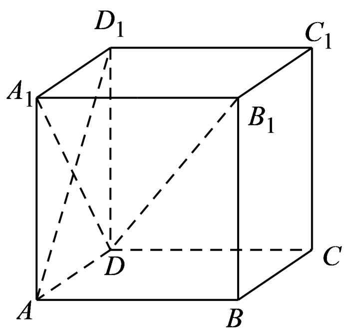
所以 A,C,E,F 不共面，错误；



B：由题设知：$A_1B_1\perp$ 面 ADD_1A_1，$AD_1\subset$ 面 ADD_1A_1，则 $A_1B_1\perp AD_1$，

而 $A_1D\perp AD_1$，$A_1D\cap A_1B_1=A_1$，$A_1D,A_1B_1\subset$ 面 A_1DB_1，

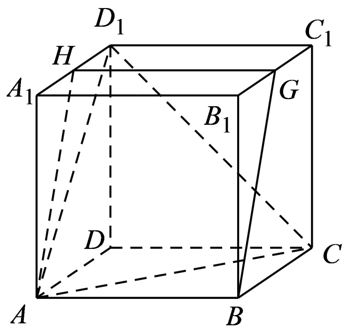
所以 $AD_1\perp$ 面 A_1DB_1，$B_1D\subset$ 面 A_1DB_1，故 $AD_1\perp B_1D$，正确；



C：若 H 为 A_1D_1 的中点，又 G 为 B_1C_1 的中点，易知：$HG//AB, HG=AB$，

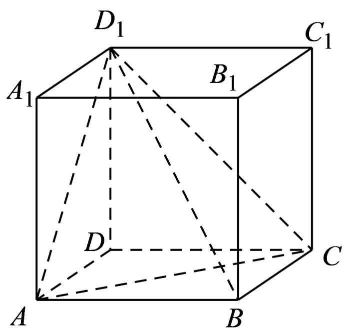
所以 $ABGH$ 为平行四边形，故 $AH//BG$，而 $AH\cap$ 面 $ACD_1=A$，

所以 BG 与面 ACD_1 不平行，错误；



D：由 $V_{D_1-ACD}=V_{D-ACD_1}$、$V_{D_1-ACB}=V_{B-ACD_1}$，而 $S_{\vartriangle ACD}=S_{\vartriangle ABC}$，则 $V_{D_1-ACD}=V_{D_1-ACB}$；

所以 $V_{D-ACD_1}=V_{B-ACD_1}$，故 D,B 到面 ACD_1 距离相等，正确.



故选：BD

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}ax^2+2x-3\ln x\left(a\in R\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. $a>-\dfrac{1}{3}$ 时 $f\left(x\right)$ 存在单调递增区间

B. $a>-\frac{1}{3}$时 $f\left(x\right)$ 存在两个极值点

C. $a\bullet-\frac{1}{3}$是 $f\left(x\right)$ 为减函数的充要条件

D. $\forall a\in R,f\left(x\right)$无极大值

【答案】AC

【解析】

【分析】求出导函数 $f^{'}(x)$，注意到 $x>0$，只要讨论 $y=ax^2+2x-3$ 的正负即可得，由 $y=ax^2+2x-3>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解求得 a 的范围，判断 A，在 $a>-\frac{1}{3}$时，由导数确定函数的极值点判断 B，由导数与函数单调性的关系判断 C，由导数与极值的关系判断 D.

【详解】 $f'\left(x\right)=ax+2-\frac{3}{x}=\frac{ax^2+2x-3}{x}$, $f\left(x\right)$ 存在单调递增区间，即 $f'\left(x\right)>0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 有解，即：

$a>\frac{3-2x}{x^2}=3\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 有解， $y=3\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)=3(\frac{1}{x}-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$ 最小值为 $-\frac{1}{3}$，故

$a>-\frac{1}{3}$， A 正确；

$a>-\frac{1}{3}$时，函数 $y=ax^2+2x-3$ 的判别式 $\Delta=12a+4>0$，存在两个零点，但 $x_1x_2=-\frac{3}{a}$，故在 $a>0$ 时 x_1,x_2 异号，只有一个值是 $f'(x)=0$ 的解，即 $f'\left(x\right)=\frac{ax^2+2x-3}{x}$ 只有一个变号零点， $f(x)$ 只有一个极值点，B 错误；

$f\left(x\right)$ 为减函数，即 $f'\left(x\right)=\frac{ax^2+2x-3}{x}\bullet 0$ 恒成立，则 $a<0$ 且 $\Delta=12a+4\bullet 0$，故 $a\bullet-\frac{1}{3}$， C 正确；

当 $-\frac{1}{3}<a<0$ 时，$f'\left(x\right)=\frac{ax^2+2x-3}{x}$，函数 $y=ax^2+2x-3$ 的判别式 $\Delta=12a+4>0$，存在两个零点，且 $x_1x_2=-\frac{3}{a}>0$， $x_1>0,x_2>0$，不妨设 $x_1<x_2$，可得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时， $f'(x)<0$， $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 让递减，在 (x_1,x_2) 上递增， x_2 是极大值点， $f\left(x\right)$ 存在极大值，D 错误.

故选：AC.

11. 已知 A,B 是抛物线 $C:y^2=4x$ 上两动点， F 为抛物线 C 的焦点，则（　　）

A. 直线 AB 过焦点 F 时，$\left|AB\right|$ 最小值为 4

B. 直线 AB 过焦点 F 且倾斜角为 60° 时（点 A 在第一象限），$|AF|=2|BF|$

C. 若 AB 中点 M 的横坐标为 3，则 $|AB|$ 最大值为 8

D. 点 A 坐标 $(4,4)$，且直线 AF,AB 斜率之和为 0，AF 与抛物线的另一交点为 D，则直线，BD 方程为：$4x+8y+7=0$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于 A，由题意，过焦点，则垂直 x 轴时最小，可得答案；

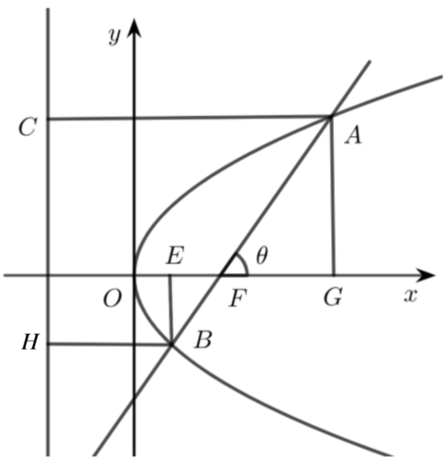
对于 B，已知直线的倾斜角，可根据抛物线焦半径公式，可得答案；

对于 C，根据三角形三边性质，可得不等式，由于中点坐标已知，根据抛物线定义与梯形中位线，可得答案；

对于 D，利用中点弦的斜率公式，可求得点 D 的纵坐标，进而求得该点的坐标，根据可以，求得 AB 的斜率，同样方法，可得点 B 的坐标，可得答案.

【详解】对于 A 选项，直线 AB 过焦点 F，当 AB 垂直于 x 轴时，$|AB|$ 取最小值 4，故正确；

对于 B 选项，由题意，作图如下：



则 $\theta=60^\circ$，$AG\perp x$ 轴，$BE\perp x$ 轴，即 $|GF|=|AF|\cos\theta$，$|EF|=|BF|\cos\theta$，

$|AC|=|GF|+p$，$|BH|=p-|EF|$，即 $|AF|=|GF|+p$，$|BF|=p-|EF|$，

$|AF|=|AF|\cos\theta+p$，$|BF|=p-|BF|\cos\theta$，$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta},|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$，

$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos60^\circ}=4,|BF|=\dfrac{p}{1+\cos60^\circ}=\dfrac{4}{3}$，故错误；

对于 C 选项，由于 AB 为两动点，所以 $|AB|\bullet|AF|+|BF|=x_A+x_B+2=8$，当且仅当直线 AB 过焦点 F 时

等号成立，故正确；

对于 D 选项，依题意，$k_{AF}=\frac{4}{3}=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}=\frac{4}{y_A+y_D}$，故 $y_D=-1$，即 $D\left(\frac{1}{4},-1\right)$，由题意，

$k_{AB}=0-k_{AF}=-\frac{4}{3}$，同理可得 $B\left(\frac{49}{4},-7\right)$，故直线 BD 方程为 $4x+8y+7=0$，故正确.

故选：ACD.

12. 将 n^2 个数排成 n 行 n 列的一个数阵.如图：该数阵第一列的 n 个数从上到下构成以 m 为公差的等差数列，每一行的 n 个数从左到右构成以 m 为公比的等比数列（其中 $m>0$）.已知 $a_{11}=2,a_{13}=a_{61}+1$，记这 n^2 个数的和为S.下列结论正确的有（　　）

a_{11}　a_{12}　a_{13}　……　a_{1n}
a_{21}　a_{22}　a_{23}　……　a_{2n}
a_{31}　a_{32}　a_{33}　……　a_{3n}
……
a_{n1}　a_{n2}　a_{n3}　……　a_{mn}

A. $m=3$

B. $\sum_{k=1}^{18}a_{kk}=\frac{103\times3^{18}+5}{4}$

C. $a_{ij}=(3i-1)\times3^j$

D. $S=\frac{1}{4}n(3n+1)(3^n-1)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据 $a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$，及等差数列、等比数列通项公式求出 m，即可判断 A、C，再利用错位相减法计算 B，根据等比数列和等差数列求和公式计算判断 D.

【详解】解：$\because a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$

$\therefore 2m^2=2+(6-1)m+1$，解得 $m=3$ 或 $-\frac{1}{2}$（舍负），即选项 A 正确；

$\therefore a_{ij}=a_{i1}\cdot3^{j-1}=\left[2+(i-1)\cdot3\right]\cdot3^{j-1}=(3i-1)\cdot3^{j-1}$，即选项 C 错误；

令 $T=\sum_{k=1}^{k}a_{kk}$，则 $T=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{kk}=2\cdot3^0+5\cdot3^1+8\cdot3^2+\cdots+(3k-1)\cdot3^{k-1}$ ①

$3T=2\cdot3^1+5\cdot3^2+8\cdot3^3+\cdots+(3k-4)\cdot3^{k-1}+(3k-1)\cdot3^k$ ②，

①−②得，$-2T=2+3\cdot3^1+3\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+3\cdot3^{k-1}-(3k-1)\cdot3^k$

$=2+3\times\dfrac{3\left(1-3^{k-1}\right)}{1-3}-(3k-1)\cdot 3^k$

$=\left(\dfrac{5}{2}-3k\right)\cdot 3^k-\dfrac{5}{2}$，

$\therefore T=\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3k}{2}\right)\cdot 3^k$，

当$k=18$时，$\sum\limits_{k=1}^{18}a_{kk}=\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3\times 18}{2}\right)\cdot 3^{18}=\dfrac{103\times 3^{18}+5}{4}$，即选项 B 正确；

$S=\left(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\right)+\left(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\right)+\cdots+\left(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{mn}\right)$

$=\dfrac{a_{11}\left(1-3^n\right)}{1-3}+\dfrac{a_{21}\left(1-3^n\right)}{1-3}+\cdots+\dfrac{a_{n1}\left(1-3^n\right)}{1-3}$

$=\dfrac{1}{2}\left(3^n-1\right)\cdot\left(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(3^n-1\right)\cdot\left(2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 3\right)=\dfrac{1}{4}n(3n+1)\left(3^n-1\right)$，即选项 D 正确.

故选：ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x^2+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是__________（用数字作答）.

【答案】240

【解析】

【分析】写出$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$二项式展开通项，即可求得常数项.

【详解】$\because\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$

其二项式展开通项：

$T_{r+1}=C_6^r\cdot\left(x^2\right)^{6-r}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^r$

$=C_6^r\cdot x^{12-2r}(2)^r\cdot x^{-r}$

$=C_6^r(2)^r\cdot x^{12-3r}$

当$12-3r=0$，解得$r=4$

$\therefore \left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$的展开式中常数项是：$C_6^4 \cdot 2^4 = C_6^2 \cdot 16 = 15\times 16 = 240$.

故答案为：240.

【点睛】本题考查二项式定理，利用通项公式求二项展开式中的指定项，解题关键是掌握$\left(a+b\right)^n$的展开通项公式$T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r a^{n-r}b^r$，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

14. 若直线$y=x+a$和直线$y=x+b$将圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$的周长四等分，则$\left|a-b\right|=$__________.

【答案】2

【解析】

【分析】由条件可得直线$y=x+a$和直线$y=x+b$间的距离为$\sqrt{2}$，由此可求$\left|a-b\right|$的值.

【详解】设直线$y=x+a$和圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$相交与点$A,B$，直线$y=x+b$与圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$相交于点$M,N$，圆心为$C$，

因为直线$y=x+a$和直线$y=x+b$将圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$的周长四等分，

所以圆心位于两直线之间，且$\angle ACB=\angle MCN=\frac{\pi}{2}$，

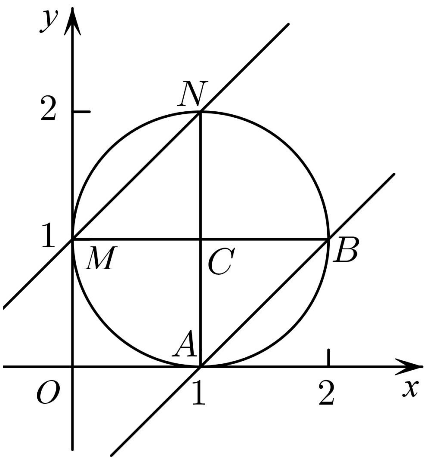
所以$\triangle ACB$为等腰直角三角形，所以圆心为C到直线$y=x+a$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

同理可得圆心为C到直线$y=x+b$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故直线$y=x+a$和直线$y=x+b$间的距离为$\sqrt{2}$，

所以$\frac{\left|a-b\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以$\left|a-b\right|=2$，

故答案为：2.



15. 在$\triangle ABC$中，$\tan B=4\tan A$，则当$B-A$取最大值时，$\sin C=$__________.

【答案】1

【解析】

【分析】利用基本不等式和三角函数两角和与差的公式，直接计算即可求解.

【详解】在$\triangle ABC$中，$\tan B=4\tan A$知$\tan A>0$，且$0<B-A<\frac{\pi}{2}$，

$$\tan\left(B-A\right)=\frac{\tan B-\tan A}{1+\tan B\cdot\tan A}=\frac{3\tan A}{1+4\tan^2 A}=\frac{3}{4\tan A+\frac{1}{\tan A}}\bullet\frac{3}{4}$$

当且仅当$4\tan^2 A=1\Rightarrow\tan A=\frac{1}{2}$时取等号，

$\because y=\tan x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，则此时$B-A$取最大值，且$\tan B=2$，

$\therefore\tan A\times\tan B=\frac{\sin A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}=1$，$\sin A\sin B=\cos A\cos B$，得$\cos(A+B)=0$，

$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$，$\sin\left(A+B\right)=1$，

$\therefore\sin C=1$.

故答案为：1

16. 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F$作其中一条渐近线的垂线，垂足为$Q$，直线$FQ$与双曲线的左、右两支分别交于点$M,N$，若$|MQ|=3|QN|$，则双曲线的离心率是__________.

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】设双曲线的左焦点为F_1，连接MF_1设$\angle QFO=\theta$，分别求得$|FM|=\frac{b^2}{c\cos\theta-a}=\frac{b^2}{b-a}$，同理

$\left|FN\right|=\dfrac{b^2}{\cos\theta+a}=\dfrac{b^2}{b+a}$，结合$\left|MQ\right|=3\left|QN\right|$，求得$a=\dfrac{1}{2}b$，进而求得离心率.

【详解】如图所示，根据点到直线的距离公式可得点F到直线$y=\dfrac{b}{a}x$的距离为b，

设双曲线的左焦点为F_1，连接MF_1，则$\left|MF_1\right|=\left|FM\right|-2a$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OQF$中，设$\angle QFO=\theta$，则$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$，

在$\triangle F_1MF$中，由余弦定理得$\left|MF_1\right|^2=\left|FM\right|^2+\left|FF_1\right|^2-2\left|FM\right|\cdot\left|FF_1\right|\cos\theta$，

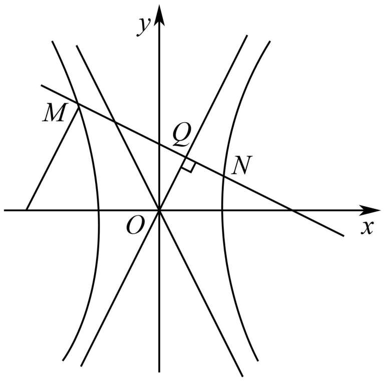
将$\left|MF_1\right|=\left|FM\right|-2a$代入整理后得$\left|FM\right|=\dfrac{b^2}{c\cos\theta-a}=\dfrac{b^2}{b-a}$，

同理$\left|FN\right|=\dfrac{b^2}{c\cos\theta+a}=\dfrac{b^2}{b+a}$，

因为$\dfrac{\left|MQ\right|}{\left|QN\right|}=\dfrac{\left|FM\right|-\left|QF\right|}{\left|QF\right|-\left|FN\right|}=\dfrac{\dfrac{b^2}{b-a}-b}{b-\dfrac{b^2}{b+a}}=\dfrac{b+a}{b-a}=3$，

所以$a=\dfrac{1}{2}b$，故离心率为$\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$



四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列$\left\{a_n\right\}$中$a_1=1.M\left(1,1\right),A_n\left(2,a_n\right),B_n\left(3,2a_{n+1}-3\right)$为直角坐标平面上的点.对任意$n\in\mathrm{N}^*,M$、$A_n$、$B_n$三点共线.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）求证：$\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+2}}<\dfrac{3}{4}$.

【答案】（1）$a_n = n$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据向量共线的坐标表示：$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$，整理得 $a_{n+1} - a_n = 1$，即可判断数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，结合等差数列通项公式运算求解；（2）根据裂项相消求和，$\frac{1}{a_na_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$，代入运算理解.

【小问 1 详解】

由题意得：$\overrightarrow{MA_n} = (1, a_n - 1), \overrightarrow{MB_n} = (2, 2a_{n+1} - 4)$，

$\because M、A_n、B_n$ 三点共线，则 $\overrightarrow{MA_n} // \overrightarrow{MB_n}$，可得 $2a_n - 2 = 2a_{n+1} - 4$，即 $a_{n+1} - a_n = 1$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 公差为 1 的等差数列，所以 $a_n = n$.

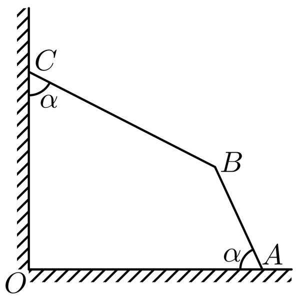
【小问 2 详解】

$$\because \frac{1}{a_na_{n+2}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right),$$

所以 $\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} < \frac{3}{4}.$$

18. 某公园要建造如图所示的绿地 $OABC, OA、OC$ 为互相垂直的墙体，已有材料可建成的围栏 AB 与 BC 的总长度为 12 米且 $\angle BAO = \angle BCO$.设 $\angle BAO = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.



（1）当 $AB = 3, \alpha = \frac{5\pi}{12}$ 时，求 AC 的长；

（2）当 $AB = 6$ 时，求 $OABC$ 面积 S 的最大值及此时 α 的值.

【答案】（1）$3\sqrt{13}$ 米

（2）当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{8}$ 时，养殖场 $OABC$ 最大的面积为 $18\sqrt{2}+18$ 平方米

【解析】

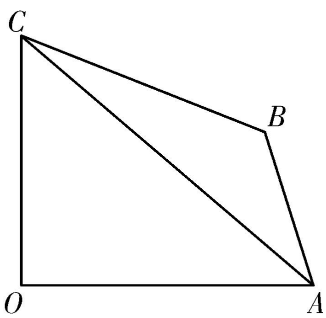
【分析】（1）在 $\triangle ABC$ 中，根据题意利用余弦定理运算求解；（2）在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦定理建立边角关系 $AC^2=72+72\sin 2\alpha$，再结合辅组角公式整理可得 $S=18\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)+18$，根据正弦函数分析求解.

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3, BC=9, \angle ABC=2\pi-\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{3}$

由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=117$，故 $AC=3\sqrt{13}$.

因此 AC 的长为 $3\sqrt{13}$ 米.



【小问 2 详解】

由题意，$AB=BC=6, \angle ACB=\angle CAB, \angle ABC=2\pi-2\alpha-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha$

所以 $\angle OAC=\angle OCA=\dfrac{\pi}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中，

由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=72-72\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=72+72\sin 2\alpha$

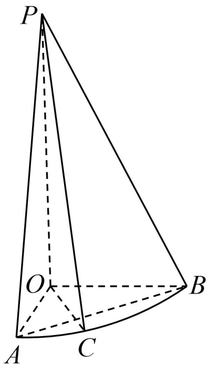
所以 $S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{4}AC^2=18+18\sin 2\alpha$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=-18\cos 2\alpha$

于是 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AOC}=-18\cos 2\alpha+18+18\sin 2\alpha=18\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)+18, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

当 $2\alpha-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\dfrac{3\pi}{8}$ 时，S 取到最大值，最大值为 $18\sqrt{2}+18$.

因此，当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{8}$ 时，养殖场 $OABC$ 最大的面积为 $18\sqrt{2}+18$ 平方米.

19. 如图，在直角$\triangle POA$中，$PO \perp OA, PO = 2OA = 4$，将$\triangle POA$绕边$PO$旋转到$\triangle POB$的位置，使$\angle AOB = 90^{\circ}$，得到圆锥的一部分，点$C$为$\overset{\frown}{AB}$上的点，且$\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$.



（1）求点O到平面PAB的距离；

（2）设直线PC与平面PAB所成的角为φ，求$\sin\varphi$的值.

【答案】（1）$\frac{4}{3}$

（2）$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{15}$

【解析】

【分析】（1）根据题意，分别计算三棱锥$O-PAB$与三棱锥$P-OAB$的体积，设出点O到平面PAB的距离，由$V_{O-PAB} = V_{P-OAB}$构造方程解得答案；

（2）根据题意，建立空间直角坐标系，分别找到直线PC的方向向量，求出平面PAB的法向量，代入直线与平面所成的角计算公式，计算得答案.

【小问1详解】

证明：由题意知：$PO \perp OA,\ PO \perp OB,\ OA \cap OB = O$，

$OA \subset$平面AOB，$OB \subset$平面AOB，$\therefore PO \perp$平面AOB，

又$PO = 2OA = 4$，所以$PA = PB = 2\sqrt{5},\ AB = 2\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 6$，

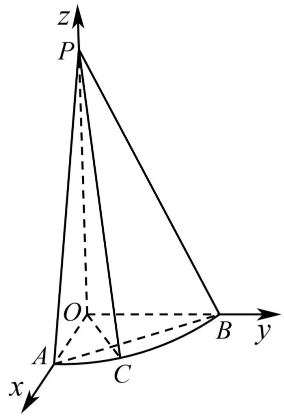
设点O到平面PAB的距离为d，由$V_{O-PAB} = V_{P-OAB}$

得$\frac{1}{3} \times d \times 6 = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2$，解得$d = \frac{4}{3}$；

【小问2详解】

以O为原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$的方向分别为$x,y,z$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A(2,0,0),B(0,2,0),P(0,0,4)$，



由题意知$\angle AOC=\dfrac{\pi}{6}$，则$C(\sqrt{3},1,0)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0),\overrightarrow{AP}=(-2,0,4),\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},1,-4)$.

设平面PAB的法向量为$\vec{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a+2b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2a+4c=0\end{cases}$，取$c=1$，则$a=b=2$，

可得平面PAB的一个法向量为$\vec{n}=(2,2,1)$，

所以$\sin\varphi=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{PC}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}-2\right|}{6\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{15}$.

20. 某工厂为了提高生产效率，对生产设备进行了技术改造，为了对比技术改造后的效果，采集了技术改造前后各20次连续正常运行的时间长度（单位：天）数据，整理如下：

改造前：19,31,22,26,34,15,22,25,40,35,18,16,28,23,34,15,26,20,24,21；

改造后：32,29,41,18,26,33,42,34,37,39,33,22,42,35,43,27,41,37,38,36.

（1）完成下面的列联表，并依据小概率值$\alpha=0.010$的独立性检验，分析判断技术改造前后的连续正常运行时间是否有差异？

技术改造	设备连续正常运行天数		合计
	超过30	不超过30	
改造前			

改造后			
合计			

（2）工厂的生产设备的运行需要进行维护，工厂对生产设备的生产维护费用包括正常维护费和保障维护费两种，对生产设备设定维护周期为T天（即从开工运行到第KT天，$k\in N^*$）进行维护，生产设备在一个生产周期内设置几个维护周期，每个维护周期相互独立.在一个维护周期内，若生产设备能连续运行，则只产生一次正常维护费，而不会产生保障维护费；若生产设备不能连续运行，则除产生一次正常维护费外，还产生保障维护费，经测算，正常维护费为0.5万元/次，保障维护费第一次为0.2万元/周期，此后每增加一次则保障维护费增加0.2万元.现制定生产设备一个生产周期（以120天计）内的维护方案：$T=30$，$k=1,2,3,4$.以生产设备在技术改造后一个维护周期内能连续正常运行的频率作为概率，求一个生产周期内生产维护费的分布列及均值.

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中$n=a+b+c+d$）

【答案】（1）列联表答案见解析，技术改造前后的连续正常运行时间有差异

（2）分布列答案见解析，均值为2.275万元

【解析】

【分析】（1）根据题意，补全列联表，代入χ^2公式计算结果，对照表格，判断得答案；

（2）首先判断一个维护周期内，生产线需保障维护的概率为$P=\dfrac{1}{4}$，设一个生产周期内需保障维护的次数为ξ，则ξ服从二项分布，再根据题意找到ξ与生产周期内生产维护费的关系，计算ξ的可能取值，依次计算其概率得分布列，计算分布列的期望，得答案.

【小问1详解】

列联表为：

<table>
<tr><td rowspan="2">技术改造</td><td colspan="2">设备连续正常运行天数</td><td rowspan="2">合计</td></tr>
<tr><td>超过30</td><td>不超过30</td></tr>
</table>

改造前	5	15	20
改造后	15	5	20
合计	20	20	40

零假设H_0：技术改造前后的连续正常运行时间无差异.

$\therefore \chi^2=\dfrac{40(5\times5-15\times15)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$，

$\therefore$依据小概率值$\alpha=0.010$的独立性检验分析判断H_0不成立，

即技术改造前后的连续正常运行时间有差异；

【小问 2 详解】

由题知，生产周期内有 4 个维护周期，一个维护周期为 30 天，

一个维护周期内，生产线需保障维护的概率为$P=\dfrac{1}{4}$，

设一个生产周期内需保障维护的次数为ξ，则$\xi\sim B\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$，

一个生产周期内的正常维护费为$0.5\times4=2$万元，保障维护费为$\dfrac{0.2\xi\times(\xi+1)}{2}=\left(0.1\xi^2+0.1\xi\right)$万元，

$\therefore$一个生产周期内需保障维护ξ次时的生产维护费为$\left(0.1\xi^2+0.1\xi+2\right)$万元，

设一个生产周期内的生产维护费为X，则X的所有可能取值为$2,\ 2.2,\ 2.6,\ 3.2,\ 4$，

$$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$$

$$P(X=2.2)=\mathrm{C}_4^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2.6)=\mathrm{C}_4^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$$

$$P(X=3.2)=\mathrm{C}_4^3\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$$

所以，X的分布列为

X	2	2.2	2.6	3.2	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

$$\therefore E(X)=2\times\frac{81}{256}+2.2\times\frac{27}{64}+2.6\times\frac{27}{128}+3.2\times\frac{3}{64}+4\times\frac{1}{256}$$

$$=\frac{162+237.6+140.4+38.4+4}{256}$$

$$=\frac{582.4}{256}=2.275$$

$\therefore$ 一个生产周期内生产维护费的均值为 2.275 万元.

21. 设 F_1,F_2 分别是圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，MF_2 与 x 轴垂直.直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N，且直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

（1）求椭圆 C 的离心率.

（2）设 $D(0,1)$ 是椭圆 C 的上顶点，过 D 任作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A、B 两点，过点 D 作线段 AB 的垂线，垂足为 Q，判断在 y 轴上是否存在定点 R，使得 $|RQ|$ 的长度为定值？并证明你的结论.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）存在，证明见解析

【解析】

【分析】（1）由题意，表示点 M 的坐标，根据斜率与倾斜角的关系，可得出 a,b,c 的等量关系，再根据 a,b,c 的性质，可得齐次方程，即可得答案；

（2）根据椭圆上顶点的性质，可得 b 的值，进而得到椭圆的标准方程，设出直线 AB 的方程，并联立且消元整理一元二次方程，写韦达定理，根据垂直，解得截距的值，得到直线过定点，根据圆的性质，直径所对的圆周角为直角，半径为定值，可得圆心便是答案.

【小问 1 详解】

由题意知，点 M 在第一象限.$\because M$ 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，

$\therefore M$ 的横坐标为 c.当 $x=c$ 时，$y=\frac{b^2}{a}$，即 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

又直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\tan\angle MF_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

即 $b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}ac=a^2-c^2$，即 $c^2+\frac{\sqrt{2}}{2}ac-a^2=0$，

则 $e^2+\frac{\sqrt{2}}{2}e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $e=-\sqrt{2}$（舍去），即 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问 2 详解】

已知 $D(0,1)$ 是椭圆的上顶点，则 $b=1,\because \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},a^2=b^2+c^2,\therefore a=\sqrt{2}$，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

易得直线 AB 的斜率必然存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 可得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2(m^2-1)=0\,(*)$,

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2(m^2-1)}{1+2k^2}$，

又 $\overrightarrow{DA}=(x_1,y_1-1),\overrightarrow{DB}=(x_2,y_2-1)$，.

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)$

$=(k^2+1)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2$

$=(k^2+1)\cdot\frac{2(m^2-1)}{1+2k^2}+k(m-1)\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+(m-1)^2$，

$=\frac{2(m^2-1)(k^2+1)-4k^2(m^2-m)+(1+2k^2)(m-1)^2}{1+2k^2}=0$

化简整理有 $3m^2-2m-1=0$，得 $m=-\frac{1}{3}$ 或 $m=1$.

当 $m=1$ 时，直线 AB 经过点 D，不满足题意；

当 $m=-\frac{1}{3}$ 时满足方程 $(*)$ 中 $\Delta>0$，故直线 AB 经过 y 轴上定点 $G\left(0,-\frac{1}{3}\right)$.

又 Q 为过点 D 作线段 AB 的垂线的垂足，故 Q 在以 DG 为直径的圆上，取 DG 的中点为 $R\left(0,\frac{1}{3}\right)$，则 $|RQ|$ 为定值，且 $|RQ|=\frac{1}{2}|DG|=\frac{2}{3}$

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{x}$.

（1）判断函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,3\pi\right)$ 上极值点的个数并证明；

（2）函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的极值点从小到大分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，设 $a_n=f\left(x_n\right),S_n$ 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和.

①证明：$a_1+a_2<0$；

②问是否存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使得 $S_n\geq 0$？若存在，求出 n 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,3\pi\right)$ 内恰有两个极值点，证明见解析

（2）①证明见解析；②不存在，理由见解析

【解析】

【分析】（1）求函数在给定区间上的导数，以分子整式构造函数，再次求导，研究该导数在给定区间上与零的大小关系，以判断构造函数的单调性和变号零点的性质，根据极值的定义，可得答案；

（2）①根据（1）可得 x_1,x_2 所在区间，根据极值点的必要条件，进一步缩小其所在区间，根据三角函数的诱导公式，将 x_1 变为 $x_1+\pi$，使其在同一个单调区间，根据函数的单调性，可得 $f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)$ 与大小关系，可得答案；

②由①可得相邻两个极值之和与零的大小关系，进而得到当 n 为偶数时，和与零大小关系，再根据三角函数的性质，得到奇数时极值与零的大小关系，可得答案.

【小问 1 详解】

$f'\left(x\right)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，设 $g\left(x\right)=x\cos x-\sin x$，又 $g'\left(x\right)=-x\sin x$，

当 $x\in\left(0,\pi\right]$ 时，$\because \sin x>0,g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上单调递减，

$g\left(x\right)<g\left(0\right)=0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上无零点；

当 $x\in\left(\pi,2\pi\right]$ 时，$\because \sin x<0,g'\left(x\right)>0,g\left(x\right)$ 在 $\left(\pi,2\pi\right)$ 上单调递增，

$g(\pi)=-\pi<0,g(2\pi)=2\pi>0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(\pi,2\pi\right)$ 上有唯一零点；

当 $x\in\left(2\pi,3\pi\right]$ 时，$\because \sin x>0,g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$ 在 $\left(2\pi,3\pi\right)$ 上单调递减，

$\because g\left(2\pi\right)>0,g\left(3\pi\right)<0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(2\pi,3\pi\right]$ 上有唯一零点.

综上，函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,3\pi\right)$ 上有两个零点且在零点左右函数符号发生改变，

故函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,3\pi\right)$ 内恰有两个极值点.

【小问 2 详解】

①由（1）知 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,\pi\right]$ 无极值点；在 $x\in\left(\pi,2\pi\right]$ 有极小值点，即为 x_1；

在 $x\in\left(2\pi,3\pi\right]$ 有极大值点，即为 x_2，

同理可得，在 $\left(3\pi,4\pi\right]$ 有极小值点 x_3，在 $\left(n\pi,\left(n+1\right)\pi\right]$ 有极值点 x_n，

由 $x_n\cos x_n-\sin x_n=0$ 得 $x_n=\tan x_n$，$\because x_2>x_1,\therefore \tan x_2>\tan x_1=\tan\left(x_1+\pi\right)$，

$\because g(\pi)<0,g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1,g(2\pi)>0,g\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)<0$，

$\therefore x_1\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right),x_2\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right),\because x_2,x_1+\pi\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，

由函数 $y=\tan x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递增得 $x_2>x_1+\pi$，

$\therefore a_1+a_2=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\dfrac{\sin x_1}{x_1}+\dfrac{\sin x_2}{x_2}=\cos x_1+\cos x_2$，

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递减得 $\cos x_2<\cos\left(x_1+\pi\right)=-\cos x_1$，

$\therefore a_1+a_2=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)<0$.

②同理 $x_{2n-1}\in\left(\left(2n-1\right)\pi,2n-\dfrac{\pi}{2}\right),x_{2n}\in\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>x_{2n}>x_{2n-1}+\pi>2n\pi$，

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(n\in\mathbf{N}\right)$ 上单调递减得 $\cos x_{2n}<-\cos x_{2n-1}$，

$\therefore a_{2n}+a_{2n-1}=f\left(x_{2n}\right)+f\left(x_{2n-1}\right)=\cos x_{2n}+\cos x_{2n-1}<0$，且 $a_{2n}=f\left(x_{2n}\right)>0,a_{2n-1}=f\left(x_{2n-1}\right)<0$，

当 n 为偶数时，从 $a_1=f\left(x_1\right)$ 开始相邻两项配对，每组和均为负值，

即 $S_n=\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right]+\left[f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right]+\cdots+\left[f\left(x_{n-1}\right)+f\left(x_n\right)\right]<0$，结论成立；

当 n 为奇数时，从 $a_1=f\left(x_1\right)$ 开始相邻两项配对，每组和均为负值，还多出最后一项也是负值，

即 $S_n=\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right]+\left[f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right]+\cdots+\left[f\left(x_{n-2}\right)+f\left(x_{n-1}\right)\right]+f\left(x_n\right)<0$，结论也成立，

综上，对一切$n \in \mathbf{N}^*, S_n < 0$成立，故不存在$n \in \mathbf{N}^*$使得$S_n \geq 0$.